UEBER DEN GOURSAT'SCHEN BEWEIS DES CAUCHY'SCHEN INTEGRALSATZES*

VON

ALFRED PRINGSHEIM

Der CAUCHY'sche Satz über das Verschwinden eines geschlossenen Integrals von der Form $\int f(z)\,dz$ hat durch die in Bd. 1, pp. 14–16 dieser Zeitschrift von Herrn GOURSAT publicirte Note eine ausserordentlich bemerkenswerthe Erweiterung erfahren, insofern alle bisherigen Beweise, um vollständig und exakt zu sein, die *Stetigkeit* von $f'(z)$ oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft,† die *gleichmässige* Differenzirbarkeit von $f(z)$, entweder schlechthin oder zum mindesten in gewissem Umfange ‡ zur unentbehrlichen Voraussetzung hatten. In jener Note zeigt nun Herr GOURSAT, dass man denjenigen Hauptschluss, welcher bei dem früher (Acta math., T. IV (1884), pp. 197–200) von ihm mitgetheilten Beweise auf der Voraussetzung der *gleichmässigen* Differenzerbarkeit beruht, mit Hülfe einer weniger speciellen, *jeder* (im complexen Sinne) *differenzirbaren* Function *eo ipso* zukommenden Eigenschaft herleiten kann. Dieselbe ist enthalten in dem folgenden LEMMA:

Es sei $f(z)$ für alle Stellen eines von der geschlossenen Curve C begrenzten Bereiches A stetig und mit einer endlichen Derivirten $f'(z)$ begabt. Wird dann $\epsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben. so lässt sich A (auf unendlich viele Arten) in hinlänglich kleine Theilstücke A_ν zerlegen, derart dass:

$$\text{(I)} \qquad |f(z_\nu) - f(\xi_\nu) - (z_\nu - \xi_\nu)\, f'(\xi_\nu)| \leqq \epsilon\, |z_\nu - \xi_\nu|.$$

Dabei bedeutet z_ν jeden beliebigen Punkt auf der Begrenzung von A_ν, ξ_ν einen bestimmten, im Innern oder auf der Begrenzung von A_ν allemal wirklich vorhandenen Punkt.

Nachdem Herr GOURSAT dieses Lemma bewiesen, begnügt er sich im übrigen mit der Bemerkung, man könne nun auf Grund desselben die für seinen oben citirten, ersten Beweis erforderliche Theilung des Gesammtbereiches immer so

* Presented to the Society at the Ithaca meeting, August 19, 1901. Received for publication May 24, 1901.

† Vgl. Münchener Berichte, Bd. 25 (1895), p. 295.

‡ Vgl. Münchener Berichte, Bd. 29 (1899), p. 61. W. F. OSGOOD, American M. S. Bulletin, Bd. 5 (1898), p. 85.

einrichten, *dass das übrige Raisonnement in nichts geändert zu werden brauche.** Dieser *cum grano salis* zwar zutreffende Ausspruch ist indessen seinem *Wortlaute* nach nicht ganz exakt, ja sogar dazu angethan, † bezüglich der *Tragweite* des obigen Lemmas und der *richtigen Art seiner Anwendung* gewisse Missverständnisse und Zweifel hervorzurufen, ‡ nämlich: Der ursprüngliche GOURSAT'sche Beweis des CAUCHY'schen Satzes beruht auf einer Theilung des Bereiches A in lauter *congruente*, einen gewissen Kleinheitsgrad § besitzende *Quadrate* bezw. (längs des Randes) *Bruchstücke solcher Quadrate*, wobei aber jedes in Betracht kommende Quadrat immer nur *ein* solches Bruchstück liefert, und nicht in *der* Weise zerfallen soll, dass *mehrere* Bruchstücke dem Bereiche A angehören. (Ich will diese Art der Theilung im folgenden stets durch den Ausdruck bezeichnen: es werde der Bereich A in Quadrate "*etc.*" zerlegt).

Fasst man also den obigen Ausspruch des Herrn GOURSAT nach seinem *Wortlaute* auf, so müsste man annehmen, es existire auf Grund jenes Lemmas allemal eine Eintheilung in lauter *congruente* Quadrate "*etc.*" A_ν, derart dass für jedes A_ν die Bedingung (I) erfüllt ist. Dies geht nun aber aus dem *Beweise* des fraglichen Lemmas *keineswegs* hervor, vielmehr lehrt derselbe nur so viel, dass *unter einer gewissen der Randcurve C aufzuerlegenden Beschränkung* zwar stets *quadratische* Eintheilungen der verlangten Art vorhanden sind, dass dieselben aber im allgemeinen aus Quadraten bezw. Bruchstücken von Quadraten *verschiedener* Grössen bestehen werden.

Vor allem hat man die Randcurve C als *abtheilungsweise monoton* d. h. *so* anzunehmen, dass jede ihrer beiden Coordinaten nur eine endliche Anzahl von Extremen aufzuweisen hat. ‖ Man kann alsdann eine Strecke λ_0 hinlänglich

---

* "sans modifier en rien le reste du raisonnement." (a. a. O., p. 16.)

† It is understood that the criticism relates merely to verbal form, and that neither the scope of GOURSAT'S lemma nor its manner of application in proof of GOURSAT'S form of CAUCHY'S theorem is subject to reasonable doubt. The lemma neither in statement nor in proof refers to an ultimate division into *congruent* squares, while the division into such squares utilized in GOURSAT'S original proof of CAUCHY'S theorem is evidently not an essential part of that proof. In view however of the importance of the subject the application of the lemma may well be given explicitly ; cf. p. 416 of the text.—THE EDITORS.

‡ Herr E. V. HUNTINGTON (Strassburg) hatte die Güte, mich hierauf aufmerksam zu machen.

§ Ein von vornherein bestimmter (nämlich von der Natur der Randcurve abhängiger) Kleinheitsgrad des quadratischen Gitters ist erforderlich, wenn jedes am *Rande* auftretende Theilstück lediglich von *einem* zusammenhängenden Stücke der Randcurve, im übrigen von einem *Theile* eines Gitterquadrates begrenzt sein soll. Man kann im übrigen diese (von GOURSAT *stillschweigend*, von O. STOLZ, *Grundzüge der Diff.- und Integr.-R.*, II, pp. 213, 218, *ausdrücklich* gemachte) Voraussetzung in gewissem Umfange auch fallen lassen, ohne das betreffende Raisonnement im wesentlichen zu ändern. (Siehe weiter unten).

‖ Es würde nicht einmal genügen anzunehmen : Die Curve C soll von jeder zu den Axen parallelen Graden nur in einer *endlichen* Anzahl von Punkten *geschnitten* werden (wobei eine Gerade welche die Curve in unendlich vielen Punkten *berührt* oder durch unendlich viele *Spitzen* geht nicht als *Schnitt*linie anzusehen wäre): dabei braucht nämlich die Anzahl der Schnittpunkte

klein so fixiren, dass kein Quadrat, dessen Seiten $\leqq \lambda_0$ und den Coordinatenaxen parallel sind, von der Randcurve in mehr als zwei Stücke zerschnitten wird. Denkt man sich nun den Bereich A zunächst mit einem quadratischen Gitter von der Seitenlänge $\lambda \leqq \lambda_0$ überzogen, so folgt aus der beim Beweise des GOURSAT'schen Lemmas angewendeten Schlussweise für's erste nur so viel, dass bei hinlänglicher Verkleinerung von λ (etwa durch Untertheilung von λ_0) *ein* oder *mehrere* Theilbereiche A_ν der Bedingung (I) genügen müssen; sodann, dass jeder Theilbereich A'_ν, welcher der Bedingung (I) noch nicht genügt, durch weitere geeignete Untertheilung im Quadrate "*etc.*" mit der Eigenschaft (I) zerlegt werden könne. Es folgt aber *nicht*, dass die für irgend ein A'_ν geeignete Untertheilung dieses A'_ν in lauter *congruente* Quadrate "*etc.*" zerlegen müsse und, selbst wenn dies der Fall sein sollte, dass die Anwendung der *nämlichen* Untertheilung auf irgend einen der mit A_ν bezeichneten, *schon* der Bedingung (I) *genügenden* Theilbereiche *wieder* lauter Theilbereiche *mit der Eigenschaft* (I) liefern müsse.

Im übrigen wird man jene "geeignete" Untertheilung am einfachsten in *der* Weise erzielen, dass man jedes der Quadrate, welches einen Theilbereich A'_ν ausmacht oder in sich enthält, in 4 congruente Quadrate mit der Seitenlänge $\lambda/2$ zerlegt, jedes dieser letzteren, *sofern es nicht bereits einen der Bedingung* (I) *genügenden Theilbereich liefert* oder überhaupt keine Innenpunkte von A mehr enthält, wieder in 4 congruente Quadrate mit der Seitenlänge $\lambda/4$ u. s. f. Der GOURSAT'sche Schluss lehrt dann, dass der angedeutete Process, bei dem also jedesmal alle diejenigen Quadrate, welche der Bedingung (I) bereits genügende Theilbereiche liefern oder keine Innerpunkte von A mehr enthalten, *von der weiteren Untertheilung ausgeschlossen sind*, nach einer *begrenzten* Anzahl von Operationen zu dem gewünschten Endziele führen muss. Man gelangt also auf diese Weise zu der folgenden pecielleren Formulirung des fraglichen Lemmas.

Unter den oben über $f(z)$ und über die Randcurve C gemachten Voraussetzungen lässt sich der Bereich A in eine endliche Anzahl von Quadraten Q_μ und (oben näher qualificirten) Bruchstücken R_ν von Quadraten mit der Sei-

---

noch *nicht* (wie bei einer *abtheilungsweise monotonen* Curve) unter einer *festen* endlichen Zahl zu bleiben (*Beispiel:* $y = x^2 \sin^2 1/x$ in jedem endlichen die Stelle $x = 0$ enthaltenden Intervall). In Folge dessen könnten sich bei der Untertheilung die Schnittpunkte jedesmal so vermehren, dass am Rande von A immer noch Quadrate vorhanden bleiben, welche *mehrere* Theilstücke von A enthalten. Man könnte indessen in diesem Falle dem fraglichen Lemma die folgende, für den Beweis des Integralsatzes noch ausreichende (s. die folgende Fussnote) Form geben: „*Der Bereich A lässt sich mit einer endlichen Anzahl von Quadraten Q_ν überdecken, derart dass jedes Q_ν nur eine endliche Anzahl von Theilstücken A_{m_ν} des Bereiches A und überdies einen ebenfalls zu A (also zu einem der A_{m_ν}) gehörigen Punkt ξ_ν von folgender Eigenschaft enthält: man hat*

$$|f(z_{m_\nu}) - f(\xi_\nu) - (z_{m_\nu} - \xi_\nu) \cdot f'(\xi_\nu)| \leqq \varepsilon \, |z_{m_\nu} - \xi_\nu|,$$

wobei wiederum z_{m_ν} *jeden Punkt der Begrenzung aller A_{m_ν} bedeutet.*"

tenlänge λ, $\lambda/2$, $\cdots$, $\lambda/2^m$ *zerlegen, derart dass jedes* Q_μ *und* R_ν *der Bedingung* (I) *genügt.*

Legt man nun bei dem GOURSAT'schen Beweise des Integralsatzes eine in vorstehender Weise *modificirte* Gebietstheilung zu Grunde, so behalten nichtsdestoweniger alle *wesentlichen* Schlüsse ihre Geltung, da sie in Wahrheit von einer etwaigen *Congruenz* der betreffenden Quadrate völlig unabhängig sind. Man hat nämlich für jedes der oben mit Q_μ bezeichneten quadratischen Theilstücke, falls dessen Seitenlänge mit a_μ bezeichnet wird:

$$\int_{(Q_\mu)} |z_\mu - \xi_\mu|\,|dz_\mu| < (\sqrt{2}\,a_\mu)\,4\,a_\mu = \sqrt{2}\,4\,Q_\mu .$$

Und wenn R_ν ein Bruchstück eines Quadrates $Q_\nu = a_\nu^2$ bedeutet, welches zum Theil von dem Curvenstücke s_ν begrenzt wird:

$$\int_{(R_\nu)} |z_\nu - \xi_\nu|\,|dz_\nu| < (\sqrt{2}\,a_\nu)\,(4\,a_\nu + s_\nu) \leqq \sqrt{2}\,(4\,Q_\nu + \lambda s_\nu).^*$$

Bezeichnet man also mit $\mathfrak{A}$ die Summe der Quadrate des ursprünglichen λ-Gitters, soweit dieselben Innen-Punkte von A enthalten, mit S die Gesammtlänge der Randcurve von A, und fasst ausserdem wieder die Q_μ, R_ν unter der Beziehung A_ν zusammen, so folgt:

$$\sum \int_{(A_\nu)} |z_\nu - \xi_\nu|\,dz_\nu < \sqrt{2}\,(4\,\mathfrak{A} + \lambda S),$$

worauf dann alles übrige genau wie bei dem ursprünglichen GOURSAT'schen Beweise sich ergiebt.

Ich glaube nicht fehl zu gehen, wenn ich annehme, dass Herr GOURSAT den oben citirten Ausspruch ungefähr im Sinne der eben gemachten Auseinandersetzungen verstanden wissen will: immerhin dürften die vorstehenden Erläuterungen wohl nicht so ganz selbstverständlich und somit auch nicht überflüssig erscheinen.

Der Vollständigkeit halber möchte ich noch hinzufügen, dass die für den obigen Beweis, noch erforderliche Relation:

---

* Dabei könnte R_ν ausser der von Herrn GOURSAT (Acta Mathematica, a. a. O., p. 199) schematisch angedeuteten Gestalt (Fig. I) auch diejenige von Fig. II haben. Die obige Ungleichung bleibt aber auch richtig für ein Theilstück von der Form Fig. III und sogar, wenn der in der vorigen Fussnote charakterisirte Fall vertritt (Fig. IV): natürlich hat man dann unter s_ν die *Summe* der betreffenden Curvenbögen zu verstehen.

I II III IV

$A_{1\nu}$ $A_{2\nu}$ $A_{3\nu}$ ξ_ν

$$\int_{(c)} z\,dz = 0$$

(wo c eine geschlossene Curve bedeutet, die man im übrigen nur als stetig und rectificirbar anzunehmen braucht) entgegen einer früher von mir gemachten, die principielle Einfachheit des GOURSAT'schen Beweises mit Unrecht in Frage stellenden Bemerkung,* *ohne* jede umständlichere Grenzbetrachtung auf die allereinfachste Art gewonnen werden kann, sofern nur die Bedeutung und eindeutige Existenz von $\int f(z)\,dz$, erstreckt über eine Curve vom Charakter c in der üblichen Weise festgestellt ist. Darnach hat man nämlich, wenn $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, $z_n = z_0$ eine cyklische Folge von Punkten auf der Curve c bedeuten und ξ_ν einen willkürlichen Punkt des Bogenstückes $z_{\nu-1} z_\nu$ vorstellt:

$$\int_{(c)} z\,dz = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\,\xi_\nu \qquad (z_n = z_0).$$

Setzt man jetzt einmal: $\xi_\nu = z_\nu$, darauf: $\xi_\nu = z_{\nu-1}$, so folgt durch Addition der betreffenden Gleichungen:

$$2\int_{(c)} z\,dz = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} (z_n^2 - z_0^2) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Durch die vorstehenden Betrachtungen wird der fragliche Integralsatz zunächst nur für den Fall *abtheilungsweise monotoner* Randcurven † gewonnen. Will man *rectificirbare* Curven im *allgemeinsten* (d. h. SCHEEFFER-JORDAN'schen) Sinne als Begrenzung zulassen ‡ so bleibt wohl kaum ein anderer Weg, als dass man dem obigen Resultate lediglich die Gültigkeit des Satzes für ein *Dreieck* entnimmt und sodann mit Hülfe einer Grenzbetrachtung auf *rectificir-*

---

* Münchener Berichte, Bd. 25 (1895), p. 42, Fussnote.

† Bezw. für Randcurven, welche von keiner Parallelen zu den Axen in unendlich vielen Punkten geschnitten werden.

‡ In Bd. 1 dieser Zeitschrift, p. 501, letzte Fussnote, bemerkt Herr E. H. MOORE, ich scheine leider mit dem heutzutage üblichen Begriffe der *allgemeinen rectificirbaren Curven* nicht in Fühlung zu sein ("*out of touch with* * * *"). Das dürfte indessen wohl nicht ganz zutreffen. Ich glaube sogar in Folge des intimen Umganges mit dem Schöpfer jenes Begriffes, meinem leider allzu früh verstorbenen Freunde LUDWIG SCHEEFFER, hierüber ebenso früh und ebenso genau orientirt gewesen zu sein, als irgend ein anderer. Immerhin hatte ich, als ich den von Herrn MOORE citirten Aufsatz (Münchener Berichte, 1895) über den CAUCHY'schen Integralsatz schrieb, nach dem Vorgange von DU BOIS-REYMOND gegen die definitive Einführung des verallgemeinerten Rectifications-Begriffes gewisse Bedenken (a. a. o., p. 55, Fussnote 2). Seitdem ist nun freilich mein Glaube an des letzteren Autorität, wie in manchen anderen Punkten, so auch in *diesem* merklich geschwunden. Und nachdem durch die *zweite* Auflage von C. JORDAN'S *Cours d'Analyse* T. I (welche zur Zeit der Abfassung jenes Aufsatzes zwar schon erschienen, mir jedoch unbekannt geblieben war) die *Fruchtbarkeit* des fraglichen Begriffes in das richtige Licht gesetzt worden ist, habe ich denselben auch bedingungslos acceptirt (s. z. B. Encyklop. der Math. W., Bd. II, p. 41).

bare Curven überträgt. * Hat man also dieses Ziel vor Augen, so erscheint es offenbar weit zweckmässiger, jenen Integralsatz zunächst *überhaupt nur* für den wesentlich einfacher gearteten Fall eines *Dreiecks* zu beweisen. Nach meinem Dafürhalten würde aber dieser Weg selbst dann jedem anderen vorzuziehen sein, wenn man sich—etwa aus didaktischen Rücksichten—schliesslich mit der Zulassung *abtheilungsweise monotoner* oder auch nur "*gewöhnlicher*" Randcurven begnügen will. Die Definition bezw. der Existenz-Beweis für das über eine Curve erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ erfordert lediglich die *Stetigkeit*, nicht aber die *Differenzirbarkeit* von $f(z)$. Auf *derselben* Grundlage ergiebt sich, dass eine infinitesimale Aenderung des Integrationsweges auch nur eine infinitesimale Aenderung des Integralwerthes nach sich zieht, dass also in's besondere jedes *Curven*-Integral mit beliebiger Annäherung durch ein *Polygon*-Integral ersetzt werden kann. Diese Erkenntniss ist *an sich* wichtig und für zahlreiche analytische Untersuchungen geradezu *unentbehrlich*. Hat man sie nun aber einmal gewonnen, so liegt in der That gar kein vernünftiger Grund vor, den Beweis des eigentlichen Integralsatzes mit denjenigen Complicationen zu belasten, die sich aus der mehr oder minder zusammengesetzten Natur der Randcurve ergeben. Der wahre *Kern* jenes Integralsatzes liegt in seiner Gültigkeit für irgend einen *Special*-Bereich *einfachster* Art z. B. ein *Dreieck* und unter Voraussetzung der *Differenzirbarkeit* von $f(z)$. Die Möglichkeit, ihn auf *krummlinig* begrenzte Bereiche zu übertragen, beruht dagegen lediglich auf *Stetigkeits*-Eigenschaften, welche den Integralen *jeder stetigen* Function zukommen. †

Dies vorausgeschickt, glaube ich vielleicht manchem einen kleinen Dienst zu leisten, wenn ich den fraglichen „*Dreiecks*"-Beweis, einschliesslich der hierfür zweckmässigen Formulirung und Herleitung des GOURSAT'schen Lemmas im folgenden noch vollständig durchführe.

LEMMA I. (*Specialform des Goursat'schen Lemmas*). *Ist $f(z)$ für jede einzelne Stelle z' im Innern und auf der Begrenzung des Dreiecks Δ eindeutig definirt, stetig und mit einem endlichen* ‡ *Differentialquotienten $f'(z)$ begabt, so*

---

* Vgl. C. JORDAN, a. a. O., § 196, 197. Auch der in Bd. 1 dieser Zeitschrift, pp. 499–506 mitgetheilte Beweis des Herrn MOORE liefert in der bezeichneten Richtung keinen anderen Weg (vgl. a. a. o., p. 505), da hierbei die Randcurven ebenfalls noch von gewissen Special-Bedingung, übrigens von ziemlich complicirtem Charakter genügen müssen.

† In der That braucht, bei der Beschränkung auf *abtheilungsweise monotone* Randcurven C, für die Gültigkeit des Integralsatzes nur die *Stetigkeit*, *nicht* die *Differenzirbarkeit* von $f(z)$ auf C selbst vorausgesetzt zu werden. Vgl. Münchener Berichte, a. a. O., p. 71. (Für den Fall, dass C „Schnabelspitzen" besitzt, wäre noch eine einfache Modification zu dem a. a. o. gesagten hinzuzufügen).

‡ Damit ist also nicht einmal vorausgesetzt, dass die Gesammtheit der Zahlen $|f'(z)|$ *unter einer endlichen Schranke* bleibt. Auch brauchen in Bezug auf die Stetigkeit von $f(z)$ und bei der Bildung von $f'(z)$ durchaus nur solche Punkte in Betracht gezogen zu werden, welche dem Innern oder der Begrenzung von Δ angehören (mit anderen Worten: $f(z)$ braucht „*nach aussen*" weder stetig, noch differenzirbar zu sein).

lässt sich Δ zu jedem $\epsilon > 0$ in eine endliche Anzahl unter sich und mit Δ ähnlicher (im allgemeinen aber nicht congruenter) Dreiecke Δ_ν zerlegen, derart dass:

$$\text{(I)} \qquad |f(z_\nu) - f(\xi_\nu) - (z_\nu - \xi_\nu) f'(\xi_\nu)| \leqq \epsilon |z_\nu - \xi_\nu|.$$

Dabei bedeutet z_ν jeden beliebigen Punkt auf der Begrenzung von Δ_ν, dagegen ξ_ν einen bestimmten, im Inneren oder auf der Begrenzung von Δ_ν allemal wirklich vorhandenen Punkt.

Beweis. Der auf die Existenz von $f'(z)$ bezügliche Theil der Voraussetzung besagt folgendes: Zu jeder Stelle z' und zu jedem $\epsilon > 0$ existirt eine bestimmte Zahl $f'(z')$ und eine positive Zahl ρ'_ϵ, sodass:

$$\left| \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} - f'(z') \right| < \epsilon \quad \text{für:} \quad 0 < |z - z'| < \rho'_\epsilon,$$

und daher:

$$\text{(1)} \quad |f(z) - f(z') - (z - z') f'(z')| \leqq \epsilon |z - z'| \quad \text{für:} \quad 0 \leqq |z - z'| < \rho'_\epsilon.$$

Man halbire nun zunächst die 3 Seiten $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ von Δ und zerlege Δ durch geradlinige Verbindung der Halbirungs-Punkte in 4 congruente, dem ursprünglichen Δ ähnliche Dreiecke mit den Seiten $a^{(\kappa)}/2$ $(\kappa = 1, 2, 3)$. Jedes dieser 4 Dreiecke, sofern es nicht bereits der Bedingung (I) genügt, zerlege man auf die nämliche Art und setze dieses Verfahren analog d. h. in *der* Weise fort, dass jedes zum Vorschein kommende Theildreieck, welches der Bedingung (I) genügt, von der weiteren Untertheilung ausgeschlossen wird. Man muss dann allemal nach einer begrenzten Anzahl solcher Operationen zu einer Eintheilung gelangen, bei welcher *jedes* Theildreieck der Bedingung (I) genügt.

Denn *angenommen*, dies wäre *nicht* der Fall, so müsste wenigstens *eine unbegrenzte* Folge von Dreiecken

$$\Delta, \Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_\nu, \cdots$$

mit den resp. Seitenlängen:

$$a^{(\kappa)}, \frac{a^{(\kappa)}}{2}, \frac{a^{(\kappa)}}{2^2}, \cdots, \frac{a^{(\kappa)}}{2^\nu}, \cdots \qquad (\kappa = 1, 2, 3)$$

resultiren, derart dass jedes dieser Dreiecke Δ'_ν einen Bestandtheil (nämlich ein Viertel) des vorangehenden bildet, also auch in *sämmtlichen* vorangehenden enthalten ist, während andererseits *keins* dieser Dreiecke der Bedingung (I) genügt. Es müsste dann *ein* bestimmter Punkt ξ existiren, welcher im Innern oder auf der Begrenzung *sämmtlicher* Δ'_ν (incl. Δ) liegt. Alsdann hätte man aber nach Ungl. (1):

$$\text{(2)} \qquad |f(z) - f(\xi) - (z - \xi) f'(\xi)| \leqq \epsilon |z - \xi|$$

für ein gewisses $\rho_\epsilon > 0$ und alle dem Bereiche Δ angehörigen, der Bedingung: $|z-\xi| < \rho_\epsilon$ genügenden Punkte z. Wird nun aber n so gross angenommen, dass: $a^{(\kappa)}/2^n < \rho_\epsilon$ $(\kappa = 1, 2, 3)$, so fallen sämmtliche Δ'_ν, für welche $\nu \geqq n$, *ganz innerhalb* des Geltungsbereiches der Ungleichung (2), würden also speciell auch in Bezug auf ihre *Begrenzungspunkte* der Bedingung (I) genügen, was der oben gemachten Annahme *widerspricht.* Dieselbe erscheint daher als unzulässig, womit dann das ausgesprochene Lemma bewiesen ist.

LEMMA II. *Zerfällt bei der in dem vorigen Lemma beschriebenen Theilung das Dreieck Δ mit dem Umfange $a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} = s$ im ganzen in p ähnliche Dreiecke Δ_ν mit den resp. Umfängen s_ν, so ist:*

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\nu=1}^{p} s_\nu^2 = s^2,$$

Beweis. Es besitze die *kleinste* Art von Dreiecken, die bei der fraglichen Eintheilung vorkommt, die Seitenlängen $a^{(\kappa)}/2^n$ $(\kappa = 1, 2, 3)$, also den Umfang $s/2^n$. Jedes etwa vorkommende *grössere* Dreiecke Δ_ν besitzt dann einen Umfang: $s_\nu = 2^{m_\nu} \cdot s/2^n$, wo: $1 \leqq m_\nu < n$, und lässt sich darnach in 2^{2m_ν} jener *Minimal*-Dreiecke zerlegen. Da nun: $s_\nu^2 = 2^{2m_\nu} \cdot (s/2^n)^2$, so darf man in dem Ausdrucke: $\sum_{\nu=1}^{\nu=p} s_\nu^2$ jedes s_ν^2, welches nicht schon von einem *Minimal*-Dreiecke Δ_ν herrührt, also den Werth: $1 \cdot (s/2^n)^2$ besitzt, gerade durch dasjenige *Multiplum* von $(s/2^n)^2$ ersetzen, welches die genaue *Anzahl* der in Δ_ν Platz findenden *Minimal*-Dreiecke angiebt. Da aber die Gesammtzahl der in Δ überhaupt unterzubringenden *Minimal*-Dreiecke 2^{2n} ist, so ergiebt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{p} s_\nu^2 = 2^{2n} \cdot \left(\frac{s}{2^n}\right)^2 = s^2, \quad \text{q.e.d.*}$$

HAUPTSATZ. *Ist $f(z)$ für jede einzelne Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Dreiecks Δ eindeutig definirt, stetig und mit einem endlichen $f'(z)$ begabt, so ist:*

$$\int_{(\Delta)} f(z)\, dz = 0.$$

Beweis. Man nehme $\epsilon > 0$ beliebig klein an und denke sich das Dreieck Δ auf Grund des Lemma I in p ähnliche Dreiecke Δ_ν zerlegt, welche der Bedingung (I) genügen. Man hat dann zunächst:

---

* Der Beweis gestaltet sich noch kürzer, wenn man den *geometrischen* Satz benützen will, dass die Flächen ähnlicher Dreiecke sich verhalten, wei die Quadrate homologer Seiten, also auch wie diejenigen der Perimeter. Mann findet alsdann ohne weiteres:

$$\sum_{\nu=1}^{p} s_\nu^2 : s^2 = \sum_{\nu=1}^{p} \Delta_\nu : \Delta, \quad \text{d.h.} \ \sum_{\nu=1}^{p} s_\nu^2 = s^2.$$

$$\int_{(\Delta)} f(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{p} \int_{(\Delta_\nu)} f(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{p} \int f(z_\nu)\, dz_\nu ,$$

vorausgesetzt, dass alle Integrale in *demselben*, etwa dem *positiven* Sinne verstanden werden.

Nun ist identisch:

$$\int f(z_\nu)\, dz_\nu = \int \{ f(z_\nu) - f(\xi_\nu) - (z_\nu - \xi_\nu) f'(\xi_\nu) \}\, dz_\nu$$

$$+ \{ f(\xi_\nu) - \xi_\nu \cdot f'(\xi_\nu) \} \int dz_\nu + f'(\xi_\nu) \int z_\nu\, dz_\nu ,$$

und daher, wegen:

$$\int dz_\nu = 0 , \quad \int z_\nu\, dz_\nu = 0 ,$$

und mit Berücksichtigung von Ungl. (I):

$$\left| \int f(z_\nu)\, dz_\nu \right| \leqq \int | f(z_\nu) - f(\xi_\nu) - (z - \xi_\nu) f'(\xi_\nu) |\, | dz_\nu | ,$$

$$\leqq \epsilon \int | z_\nu - \xi_\nu |\, | dz_\nu | .$$

Wird nun wiederum der Umfang von Δ_ν mit s_ν bezeichnet, so hat man unter allen Umständen:

$$| z_\nu - \xi_\nu | < \tfrac{1}{2} s_\nu ,$$

also:

$$\left| \int f(z_\nu)\, dz_\nu \right| < \tfrac{1}{2} \epsilon s_\nu \int | dz_\nu | = \frac{\epsilon}{2} s_\nu^2 ,$$

und daher mit Berücksichtigung von Lemma II:

$$\left| \int_{(\Delta)} f(z)\, dz \right| < \frac{\epsilon}{2} \sum_{\nu=1}^{p} s_\nu^2 = \frac{\epsilon}{2} s^2 ,$$

d. h. schliesslich:

$$\int_{(\Delta)} f(z)\, dz = 0 , \quad \text{q.e.d.*}$$

München, 5. Mai, 1901.

---

* In ganz analoger Weise kann der Beweis auch für den Fall eines *Rechtecks* geführt werden: der von mir in Bd. I (1900) der Bibliotheca mathematica, p. 478 skizzirte Beweis ist in diesem Sinne zu vervollständigen. In seiner jetzigen Fassung beruht er auf derjenigen unzutreffenden Anwendung des Goursat'schen Lemmas, welche auf den ersten Seiten der vorliegenden Note des näheren erörtert wurde.